

مراجعة:

إذا كان V فضاء جداء داخلي فإنه الدالة:

$$V \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ و } x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

تكون نظماً على V نقول أنه مولد من الجداء الداخلي

البرهان:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \geq 0$$

1-

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\begin{aligned} \|ax\| &= \sqrt{\langle ax, ax \rangle} = \sqrt{a^2 \langle x, x \rangle} = |a| \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ &= |a| \|x\| \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\stackrel{\text{مف}}{=} \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x+y \rangle + \langle y, x+y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

3-

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{من متباينة شوارتز نعلم أن}$$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

ومن هنا نحصل على أن

$$\|x+y\|^2 \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$\|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \xrightarrow{\text{بالجذر}} \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ومن هنا نستنتج الدالة المعرفة - بقاً تعرف نظماً.

نتائج

كل فضاء جداء داخلي هو فضاء منظم وبالتالي هو فضاء مترى.
 إذا كان V فضاء جداء داخلي و $\|\cdot\|$ نظير المولد بالجداء الداخلي فغديتتحقق المساواة:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

التي تدعى مساواة متوازي الخيوط.

دلك حظ أنه إذا لم يحقق نظير هذه المساواة فلا يمكن أن يكون ناتج من جداء داخلي.

$$\begin{aligned} &= \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

تعريف (فضاء بنافخ)

ليكن $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ فضاءاً منظماً ول المسافة على V المولدة بالنظير، إذا كان $(V, \|\cdot\|)$ فضاءاً مترى تماماً فتقول عن V أنه فضاء بنافخ.

فضاء البوال

تعريف: ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضاءين مترين وفي تطبيقاً معرفاً على مجموعة جزئية A من E وأخذ قيمة f ، ولنفرض أن $a \in A$ و $b \in F$ نقول $f(x) \rightarrow b$ عندما $x \rightarrow a$ إذا كان لكل عدد حقيقي موجب ϵ ، عدد حقيقي موجب δ بحيث أنه إذا كان $x \in A$ و $\|x-a\| < \delta$ فإن $\|f(x)-b\| < \epsilon$.

مبرهنة

ليكن (E, d_E) و (F, d_F) فضاءين مترين وفي تطبيقاً معرفاً على مجموعة جزئية A من E وأخذ قيمة f ولنفرض أن $a \in A$ و $b \in F$ إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون $f(x) \rightarrow b$ عندما $x \rightarrow a$ هو أن تتقارب المتتالية $f(x_n)$ نحو b وذلك

أياً كانت المتتالية x_n من A والمتقاربة من a .
البرهان:

(\Leftarrow) لنفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ولنفرض أن x_n متتالية من عناصر A متقاربة من النقطة a .

عندئذٍ إذا كان $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه يوجد عدد حقيقي موجب δ بحيث إذا كان $x \in A$ و $0 < |x - a| < \delta$ فإن $|f(x) - b| < \varepsilon$. كما يوجد عدد صحيح موجب N_0 بحيث إذا كان $n \geq N_0$ فإن $|x_n - a| < \delta$ وبالتالي إذا كان $n \geq N_0$ فإن $|f(x_n) - b| < \varepsilon$. وهذا يعني أن نهاية $f(x_n)$ المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من النقطة b .

كذلك الشرط (\Rightarrow) لنفرض أن المتتالية $f(x_n)$ متقاربة من النقطة b أحياناً من أجل أي متتالية x_n من A متقاربة من a ولنفرض جدلاً أن

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq b$ عندئذٍ يوجد عدد حقيقي موجب ε بحيث أن $\forall \delta \in \mathbb{R}_+^*$ و $\exists x \in A$ ، $|x - a| < \delta$ و $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ وبالتالي

يوجد لكل عدد صحيح موجب n نقطة x_n من A بحيث يكون $|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$

$$|f(x_n) - b| \geq \varepsilon$$

وهكذا نكون وجدنا متتالية x_n من عناصر A متقاربة من النقطة a ولكن متتالية القيم $f(x_n)$ ليست متقاربة من b وهذا مخالف للفرص فالفرص الجبلية خاطئة أحياناً أن نهاية $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

نصيحة + تنبيه:

إذا وجدنا متتاليتين x_n و y_n من A متقاربتان من a وكان:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(y_n)$$

فإننا نستنتج حسب البرهان الأخيرة أن ليس للدالة f نهاية عند النقطة a

مراجعة:
 لكن f و g دالتين حقيقيتين معرفتين على المجموعتين الجزئيتين A و B من \mathbb{R}^n
 وليكن a نقطة من $\overline{A \cap B}$ إذا افترضنا وجود النهايتين
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ فإن:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad 1-$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad 2-$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad 3- \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \text{ فإن:}$$

البرهان:
 نفرض أن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = q$

إذا كان q عدداً حقيقياً موجباً فإن:

$$\exists \delta_1 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A ; d(x, a) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), p) = |f(x) - p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \delta_2 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in B ; d(x, a) < \delta_2 \Rightarrow d(g(x), q) = |g(x) - q| < \frac{\varepsilon}{2}$$

وبالتالي: يوجد $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث $d(x, a) < \delta$, $\forall x \in A \cap B$

$$\text{فإن } d(f(x) + g(x), p + q) = |f(x) + g(x) - p - q|$$

$$= |(f(x) - p) + (g(x) - q)| \leq |f(x) - p| + |g(x) - q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = p + q \quad \text{وَمِنْ بَنِيهِ أَنْ :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً ما فإنه

$$\exists \delta_3 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A ; d(x, a) < \delta_3 \Rightarrow d(f(x), p) = |f(x) - p| < \min\left(\frac{\varepsilon}{3|q|}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\exists \delta_4 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in B ; d(x, a) < \delta_4 \Rightarrow d(g(x), q) = |g(x) - q|$$

$$< \min\left(\frac{\varepsilon}{3|p|}, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\exists \delta' = \min(\delta_3, \delta_4) \in \mathbb{R}_+^* ; d(x, a) < \delta' ; |f(x) \cdot g(x) - pq| =$$

$$= |(f(x) - p)q + (g(x) - q)p + (f(x) - p)(g(x) - q)|$$

$$\leq |f(x) - p||q| + |g(x) - q||p| + |f(x) - p||g(x) - q|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3|q|} \cdot |q| + \frac{\varepsilon}{3|p|} \cdot |p| + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{3}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = pq \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \quad \text{أليس كذلك؟}$$

إذا كان ε عدداً حقيقياً موجباً ما فإنه

$$\exists \delta_5 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in A ; d(x, a) < \delta_5 ; |f(x) - p| < \frac{\varepsilon|q|}{4}$$

$$\exists \delta_6 \in \mathbb{R}_+^* ; \forall x \in B ; d(x, a) < \delta_6 ; |g(x) - q| < \min\left(\frac{|q|}{2}, \frac{\varepsilon|q|^2}{4|p|}\right)$$

وبالتالي توجد $\delta'' = \min(\delta_5, \delta_6) \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall x \in A \cap B$; $d(x, a) < \delta''$ \Rightarrow

$$|q| - |g(x)| \leq |g(x) - q| \stackrel{\text{من الفرض}}{< \frac{|q|}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(x)| \geq \frac{|q|}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{(f(x) - p)q + (q - g(x))p}{g(x) \cdot q} \right| \leq \frac{|f(x) - p||q| + |q - g(x)||p|}{|g(x)| \cdot |q|}$$

$$< \frac{\frac{\epsilon |q|}{4} \cdot |q| + \frac{\epsilon |q|^2}{4|p|} \cdot |p|}{\frac{|q|}{2} \cdot |q|} = \frac{\frac{\epsilon |q|^2}{4} + \frac{\epsilon |q|^2}{4}}{\frac{|q|^2}{2}} = \frac{\frac{\epsilon |q|^2}{2}}{\frac{|q|^2}{2}} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x) = \frac{p}{q} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

تعاريفاً: III إذا كانت f الدالة المبرنة بالشكل: $f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \rightarrow f(x,y) = \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2}$

فأثبت أن $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

الحل: بما أن كل عدد حقيقي موجب ϵ عدد حقيقي موجب δ بحيث أن $\epsilon = \delta$
 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $d_2((x,y), (0,0)) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

$$\Rightarrow d(f(x,y), 0) = |f(x,y) - 0| = |f(x,y)| = \left| \frac{x^3 \cos y}{x^2 + y^2} \right| \leq$$

$$|x| \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot |\cos y| \stackrel{\leq 1}{\leq} |x| \stackrel{\leq 1}{\leq} \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

أعني

P. 02 ,

0

1/11

11

11

1/11

11

11

11

11

5
5